数理解析研究所講究録
第 866 巻 1994 年 203-208

軸方向流を伴う渦糸ソリトンによる運動量と角運動量輸送

日大理工　紺野　公明　(Kimiaki Konno)
中部大工　市川　芳彦　(Yohi H. Ichikawa)

§1　はじめに

橋本ソリトンが運動量と角運動量を輸送することが木村[1]により示された。本報告では福本と宮寄による回転流と共に軸方向流を伴う運動方程式をもとに2つの実験、即ち Hopfinger, Browand and Gagne(HBG)[2] と Maxworthy, Mory and Hopfinger(MMH)[3] を解析し、ソリトンによる運動量と角運動量の輸送現象を考察する。2つの実験とも回転するタンクを用いて渦糸ソリトンを生成している。HBG は振動するグリッドで乱流を作りその上層に出来た渦糸を観測し、MMH は吸引チューブを用いて水を循環させ制御された条件のもとでの渦糸ソリトンを観測した。

まず基礎となる福本と宮寄による回転流と共に軸方向流を伴う運動方程式[4]と以前和達と我々が逆散乱法を拡張する過程で発見した方程式[5]の関係について述べる。§2で実験の解析し、軸方向流の効果の大きさ、その他の渦糸ソリトンのパラメタを決め、それらを用いてソリトンによる輸送現象を考察する。§3ではまとめを行う。

福本・宮寄により見いだされた渦糸の運動方程式を示す：

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} + w\left[\mathbf{X}_{sss} + \frac{3}{2}\mathbf{X}_{ss} \times (\mathbf{X}_{ss} \times \mathbf{X})_{ss}\right]. \tag{1.1}$$

ここで w は軸方向流の効果を表す係数である。これは以前和達、紺野と市川による方程式

$$\begin{aligned} &q_{xt} + sgn(\frac{dx}{ds})\left(-i\frac{q_x}{\Phi} + w\frac{q_{xx}}{\Phi^3}\right)_{xx} = 0, \\ &\Phi = \sqrt{1+|q_x|^2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

と座標変換

$$\begin{aligned} &s = x + \varepsilon_+(x,t), \\ &\tau = t, \end{aligned} \tag{1.3}$$

により結び付けられることが示された。[6]ただし

$$\begin{aligned} &\varepsilon_+ = \int_x^\infty \left[1 - \mathrm{sgn}(\frac{dx}{ds})\Phi\right] dx, \\ &\Phi = \sqrt{1+|q_x|^2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

そこですでに逆散乱問題を解いて得られている解 q を用いると渦糸ソリトンの位置ベクトル $\mathbf{X}$ は

$$\mathbf{X} = (x,\ -\mathrm{Im}\, q,\ \mathrm{Re}\, q), \tag{1.5}$$

で与えられる。1 ソリトン解は逆問題の固有値 $\lambda = \xi + i\eta\ (\eta > 0)$ を用いて次のように与えられる：

$$\begin{aligned} q &= q_0 \,\mathrm{sech}\{2\eta(s - v_g\tau - s_0)\} \exp\left\{-2i\xi(s - v_p\tau) + i\left(\theta_\lambda - \theta_c - \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \\ \varepsilon_+ &= q_0 \{\tanh[2\eta(s - v_g\tau - s_0)] - 1\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここで振幅 q_0, 群速度 v_g, 位相速度 v_p と初期位相は次の通り与えられる：

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \\ v_g &= -4\,[\xi + w\,(3\xi^2 - \eta^2)], \\ v_p &= -2\frac{\xi^2 - \eta^2 + 2w\xi(\xi^2 - 3\eta^2)}{\xi}, \\ s_0 &= \log(|C(0)|/2\eta)/2\eta, \\ \tan\theta_\lambda &= \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \\ \tan\theta_c &= \frac{C_I(0)}{C_R(0)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

この解よりソリトンの形状には軸方向流は寄与しなく、群速度、位相速度に寄与していることが分かる。この解を用いて次に実験の解析とソリトンの輸送現象を考察する。

§ 2　渦糸ソリトンによる輸送現象

まず HBG と MMH の実験データを表 1 に示す。振幅と振率を用いてソリトンの固有値 λ を決める。次に群速度と時間的にソリトンが回転する割合を用いて w と運動方程式の時間 τ と実時間との換算係数 N を求めて、それを表 2 に示す。MMH の実験では水を吸引チューブを用いて強制的に循環させているので軸方向流の効果が大きいのは理解できるが、驚いたことに HBG の実験でも大きな w の値が得られた。

橋本ソリトン[7]を用いた実験解析ではソリトンの形状を決めると群速度と位相速度が決ってしまう。それらの比 v_g/v_p は約 2 になり、表 2 の実験結果と合わないことが分かる。しかし、我々の理論では、軸方向流の効果のため表 2 に示すように群速度と位相速度が良く説明できることが分かった。

渦糸ソリトンによる運動量 $\mathbf{P}$ と角運動量 $\mathbf{M}$ は次のように与えられる：

$$\mathbf{P} = \frac{\rho}{2}\int \mathbf{X}\times\boldsymbol{\omega}\,dV\,,$$
$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{3}\int \mathbf{X}\times(\mathbf{X}\times\boldsymbol{\omega})\,dV\,. \tag{2.1}$$

これらの量をソリトン解を用いて表すために、全渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を回転流による渦度 $\boldsymbol{\omega}^s$ と軸方向流による渦度 $\boldsymbol{\omega}^a$ の和として表す：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^s + \boldsymbol{\omega}^a. \tag{2.2}$$

回転流による渦度は渦糸ソリトンの接線ベクトルに比例するので　、

$$\boldsymbol{\omega}^s = \alpha\,\mathbf{t}\,, \tag{2.3}$$

と書ける。$\boldsymbol{\omega}^a$ は $\mathrm{rot}\ \mathbf{v}^a$ で与えられ、その軸方向流の速度も渦糸ソリトンの接線ベクトルに比例し

$$\mathbf{v}^a = \beta\,\mathbf{t}\,, \tag{2.4}$$

と書ける。従って $\mathbf{P}$ と $\mathbf{M}$ は次のように書きかえられる：

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma^s}{2}\int \mathbf{X}\times\mathbf{t}ds + \sigma^a\int \mathbf{t}ds\,,$$
$$\mathbf{M} = \frac{\sigma^s}{3}\int \mathbf{X}\times(\mathbf{X}\times\mathbf{t})ds + \sigma^a\int \mathbf{X}\times\mathbf{t}ds\,, \tag{2.5}$$

ただし

$$\sigma^s = \rho\int \alpha dS\,,$$
$$\sigma^a = \rho\int \beta dS\,. \tag{2.6}$$

ここで微小体積 dV を渦糸ソリトンに沿っての弧の長さ ds とそれと垂直な断面積 dS とに分けて考えた。

1ソリトン解を用いて $\mathbf{P}$ と $\mathbf{M}$ を計算すると

$$\mathbf{P} = \left\{-\frac{\eta\xi}{(\eta^2+\xi^2)^2}\sigma^s + 2l\sigma^a\right\}\mathbf{e}_x\,,$$
$$\mathbf{M} = -\left\{\frac{\eta(3\xi^2-\eta^2)}{6(\eta^2+\xi^2)^3}\sigma^s + 2\frac{\eta\xi}{(\eta^2+\xi^2)^2}\sigma^a\right\}\mathbf{e}_x\,, \tag{2.7}$$

が得られる。ここで l は渦糸ソリトンの弧の長さである。表2の結果を使うとこれらの輸送量が評価でき、それを表3に示す。HBG の $\mathbf{P}^s/\sigma^s$ と $\mathbf{M}^s/\sigma^s$ は MMH のそれの約 1/4 で、HBG でもかなり大きな運動量と角運動量が輸送されていることが分かる。

さらに MMH は回転流の速度分布と軸方向流の速度分布を測定し、それを Burgers 渦で合わせている。それを用いると σ^s と σ^a が次のように計算できる：

$$
\begin{aligned}
\sigma^s &= \rho \int_0^\infty \frac{3.56V_m}{r_0}\, e^{-1.28r^{*2}} 2\pi r dr \\
&= 268\rho \,(\mathrm{g/cms}), \\
\sigma^a &= \rho \int_0^\infty W_m e^{-0.54r^{*2}} 2\pi r dr \\
&= 22.2\rho \,(\mathrm{g/s}),
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

ここで V_m は回転流の最大速度で、W_m は軸方向流の最大速度であり、$r^* = r/r_0$ である。渦糸ソリトンのコア半径 r_0 の実験値は 0.33cm である。吸引チューブによる吸引水量の割合が 180l/hour のとき $V_m = 93\mathrm{cm/s}$, $W_m = 35\mathrm{cm/s}$ である。ソリトンのパラメタが $\lambda = 0.45 + 0.10i\mathrm{cm}^{-1}$ と $w = -0.53\mathrm{cm}$ のときの渦糸ソリトンによる輸送量を表4に与える。これらの量を次のように解釈してみる。群速度が $v_g = -33\mathrm{cm/s}$ であるので回転流による運動量輸送を書きなおし $8.2\mathrm{g}\times v_g$ と考えると、8.2g の質量を運んでいることになる。また軸方向流について同じ様に運動量輸送を書き直すと単位長さ当り 1.3g を運んでいると考えられる。

§3　おわりに

2ソリトン解を用いて輸送量の数値計算の結果は、運動量と角運動量とも二つのソリトンからの寄与の和で与えられることを示唆している。そのことはNソリトンについてもN個のソリトンからの寄与の和として全体の運動量と角運動量が与えられること意味している。このことは運動量と角運動量が保存量であることからも理解できる。

最後に HBG の軸方向流の効果が MMH と同じぐらい大きいことは驚きであった。この事実は渦糸ソリトンの生成のメカニズムを探るとき手掛りを与えてくれるものと期待される。

文献

1) Y. Kimura, Physica **D37** (1989) 485.

2) E.J. Hopfinger, F.K. Browand and Y. Gagne, J. Fluid Mech. **125** (1991) 505.

3) T. Maxworthy, M. Mory and E. J. Hopfinger, "Waves on vortex cores and their relation to vortex breakdown," Proc. AGARD Conf. Aerodynamics of Vortical Type Flow in Three Dimensions: AGARD CPP-342, (1983) paper 29.
T. Maxworthy, E. J. Hopfinger and L. G. Redekopp, J. Fluid Mech. **151** (1985) 141.

4) Y. Fukumoto and T. Miyazaki, J. Fluid Mech. **222** (1991) 369.

5) M. Wadati, K. Konno and Y.H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Japan **47**, 1698 (1979).

6) K. Konno and Y. H. Ichikawa, Chaos, Solitons and Fractals **2** (1992) 237.
K. Konno, J. Phys. Soc. Japan **59**, 3417 (1990).

7) H. Hasimoto, J. Fluid Mech. **51** (1985) 477.

表 1

HBG と MMH の実験データ：

	HBG	MMH*
maximum amplitude q_0	0.29cm	0.49cm
torsion of filament τ_0	2.00/cm	0.89/cm
group velocity v_g	−15.7cm/s	−33cm/s
rate of rotation of filament	13.2rad/s	−2.4rad/s
wave length	$\leq$ 5cm	6.8cm
phase velocity v_p		$-27 \sim -30$cm/s
v_g/v_p	0.7 ± 0.1	1.2 ± 0.1

ここで * は吸引チューブでの吸引の割合 Q=180l/h のデータを使用する。弧の長さ s は回転するタンクの渦度ベクトルの方向を正になるようにとる。

表 2

HBG と MMH の実験データの解析結果:

	HBG	MMH
λ	1.0 + 0.32i /cm	0.45 + 0.10i /cm
w	−0.28cm	−0.53cm
N	22cm²/s	61cm²/s
wave length	3.1cm	7.0cm
phase velocity v_p	−22cm/s	−30cm/s
ratio of v_g/v_p	0.70	1.1

表 3

渦糸ソリトンによる運動量と角運動量輸送:

	HBG	MMH
λ	1.0 + 0.32i /cm	0.45 + 0.10i /cm
P^s/σ^s	−0.26	−1.0
M^s/σ^s	−0.12	−1.04
M^a/σ^a	−0.53	−2.0

表 4

固有値 $\lambda = 0.45 + 0.10i\mathrm{cm}^{-1}$ と $w = -0.53\mathrm{cm}$ を持つソリトンによる運動量と角運動量輸送:

Swirl Flow	Axial Flow
$P^s_x = -2.7 \times 10^2$ gcm/s $= -8.2\mathrm{g} \times 33$ cm/s	$P^a_x/l = 44$ g/s $= 1.3\mathrm{g} \times 33$ /s
$M^s_x = -2.8 \times 10^2$ gcm²/s	$M^a_x = -44$ gcm²/s